

DISCURSO DE INGRESO

Programas de intervención en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el niño*

Intervention programs in the teaching and learning of mathematics in children.

Vicente Bermejo Fernández**

Académico Correspondiente de la Sección de Humanidades de la Real Academia de Doctores de España
vbermejo@ucm.es

RESUMEN

Después de unas breves palabras curriculares introductorias, se resaltan las mediocres puntuaciones obtenidas en matemáticas por los escolares españoles, tanto en evaluaciones nacionales como internacionales. Se concluye recordando la Declaración de los Derechos del Niño (1959) a una formación Digna y Adecuada, postulando la construcción de puentes entre la escuela y la universidad. En el siguiente apartado se proponen cuatro programas de intervención para mejorar el desarrollo matemático del niño, concluyendo con el apartado cuatro en el que se expone más ampliamente el modelo de intervención de Bermejo y colaboradores (PEIM), basado en cuatro pilares fundamentales: los alumnos, el profesor, los contenidos y el contexto del aula. Los datos empíricos confirman la eficacia de este último modelo (PEIM).

PALABRAS CLAVE: Programas de intervención, enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, evaluaciones matemáticas, modelo PEIM

ABSTRACT

After a few brief introductory curricular words, the mediocre scores obtained in mathematics by Spanish schoolchildren are highlighted, both in national and international assessments. It concludes by recalling the Declaration of the Rights of the Child (1959) to a Dignified and Adequate formation, postulating the construction of bridges between the school and the university. In the following section, four intervention programs are proposed to improve the child's mathematical development, concluding with section four, in which the intervention model of Bermejo et al. (PEIM), based on four fundamental pillars: the students, the teacher, the contents and the context of the classroom. Empirical data confirm the effectiveness of this last model (PEIM).

KEYWORDS: Intervention programs, teaching-learning of mathematics, mathematics assessments, PEIM model.

* Discurso pronunciado por el Dr. D. Vicente Bermejo Fernández en su Toma de Posesión como Académico Correspondiente de la Real Academia de Doctores de España el día 01-12-2022.

** Profesor Emérito UCM y UCJC

1.- INTRODUCCIÓN

Quisiera empezar resaltando mi inclinación por la investigación, incluso desde mis primeros estudios realizados en París, para obtener la Licenciatura y Lectorado en Teología (1967-1968) con profesores tan ilustres como el padre dominico Ives Marie-Joseph Congar, que desempeñó un papel muy relevante en el Concilio Vaticano II, y que fue elegido cardenal en el año 1994. Aquí di mis primeros pasos en el campo de la investigación, trabajando en mi Tesina sobre Santo Tomás de Aquino, un gran filósofo y, para mí, el mejor teólogo de todos los tiempos, que fue profesor en la Sorbona en el siglo XIII, tal como aparece en el egregio frontispicio de esta Universidad parisina, que fue una de las primeras Universidades fundadas en el mundo.

En esta Tesina se recogen 727 notas y 107 citaciones de autores (ver Bermejo, 2016). Además, en esta plaza de la Sorbona tuve el placer de conocer al célebre y laureado filósofo francés Jean-Paul Sartre, en sus políticos discursos durante la huelga general de Francia en el año 1968, en el que llegaron a tambalearse no pocas instituciones francesas, incluido el mismo De Gaulle como Presidente de la República Francesa.

El año 1969 obtengo la Licenciatura en Filosofía en Madrid con la Tesina: “Disquisiciones en torno al hombre marxiano” en la que se recogen 324 notas-citas a lo largo del trabajo (ver Bermejo, 2015). Ello denota, a mi entender, un modo de escribir cada vez más informado, más objetivo y más científico.



En 1970 tomé la decisión, acertada, pero no menos compleja, de abandonar la tesis doctoral en filosofía, que estaba realizando en la Universidad de Friburgo (Suiza) sobre “La liberté chez Jean-Paul Sartre et Merleau Ponty”, para estudiar Psicología Genético-Experimental en la Universidad de Ginebra “de la mano de Jean Piaget”.



Permítaseme introducir aquí a quien fue mi maestro con algunas palabras retomadas del ABC, 1 de octubre de 1996, de mi artículo “Recordando a Piaget, maestro de la psicología del niño”, con motivo del centenario del nacimiento de Piaget: “Conocí... a Piaget en una situación un tanto curiosa, pero no insólita. A los pocos días de llegar al Instituto Jean-Jacques Rousseau de Ginebra (Escuela de Psicología entonces), merodeando con un amigo y colega suizo por el pasillo principal..., observo un grupo de personas que rodean animosamente a un personaje vestido con un envejecido y usado gabán... Entonces se me ocurrió preguntar a mi amigo quién era ese “clochard” (vagabundo). Inmediatamente oí la respuesta queda de mi amigo, que pretendía silenciar, o quizá recriminar, mi espontánea... pregunta: “Chiiis, il est Piaget”. Efectivamente, ... eran famosos su viejo gabán, su vieja boina, su vieja pipa, su vieja bicicleta, etc. Sin embargo, como alguien ha dicho, parecía rodeado de un aura intelectual similar al aura dramática que emana de los grandes actores”. Pero más interesante, Piaget impartía sus clases en el Aula Magna de la Universidad de Ginebra, “con una asistencia multitudinaria y diversa... formada tanto por estudiantes de psicología como por estudiantes y profesores de otras facultades, muchos de ellos extranjeros..., de modo que no era fácil encontrar un asiento disponible, utilizándose frecuentemente los mismos escalones de los pasillos para sentarse.... Lo que realmente impactaba en la clase de Piaget era la naturalidad, la claridad y la obviedad de los contenidos que allí se proponían, de modo que lo complicado parecía sencillo, lo difícil parecía fácil y lo discutible venía avalado por argumentos teóricos y comportamientos concretos del niño”...

Pero hagamos un muy breve recorrido por la vida y obra de Piaget. Nace el 9 de agosto de 1896 en Neuchâtel (Suiza). A los veintiún años presenta su tesis doctoral en Zoología, y toma entonces la decisión de dedicar su vida a la “explicación biológica del conocimiento”, como escribe en su Autobiografía. Para ello descubre en el laboratorio de Binet (París) el método

apropiado (el método clínico) que va a utilizar para estudiar empíricamente el pensamiento infantil. En la Universidad de Ginebra es muy bien acogido, especialmente por Claparède. Durante los primeros años, analiza sistemáticamente el desarrollo de sus tres hijos, recogiendo sus resultados en su famosa trilogía: “*La naissance de l’intelligence chez l’enfant*”, “*La construction du réel chez l’enfant*” y “*La formation du symbole chez l’enfant*”. Enseña al mismo tiempo psicología infantil en la Sorbona desde 1952 a 1963, y en 1956 crea en Ginebra el famoso Centre International d’Épistémologie Génétique, bajo el patrocinio de la Fondation Rockefeller. Muere en Ginebra en el año 1980.

Piaget ha pasado a la Historia como un genio, como un revolucionario y para los que le hemos conocido de cerca, como un infatigable trabajador. Del 18 al 22 de Noviembre de 1996, con motivo del centenario de su nacimiento, celebramos en la Facultad de Psicología de la UCM y en el Ateneo de Madrid la semana Jean Piaget. El Acto Inaugural se celebró en la Facultad de Psicología de la Universidad Complutense, con la asistencia del Excmo. y Magfco. Sr. D. Rafael Puyol, Rector de la Universidad Complutense de Madrid, del Excmo. Sr. D. Rudolf Schaller, Embajador de Suiza en España, y de otras autoridades. Aquí tuve el honor y el placer de mostrar mi gratitud a mi maestro, pronunciando la Conferencia Inaugural con el título: “Piaget, vida y obra”. El Excmo. y Magfco. Sr. D. Rafael Puyol cerró el acto “destacando, dijo, la proyección polivalente de la obra piagetiana, que ha alcanzado a disciplinas tan dispares como la psicología, la pedagogía, lógica, lingüística, matemáticas, filosofía, etc., e incluso a su propia disciplina, la geografía humana”.

Aquí, pues, en Ginebra, estudié, fui becario del CSIC durante 3 años, trabajé como profesor ayudante en la Universidad y como becario del Fond National Suisse pour la Recherche Scientifique, e hice mi tesis doctoral, que defendí, no obstante, en la Universidad Autónoma de Barcelona en octubre de 1979, para evitar el largo tiempo que suponía entonces la convalidación. En esta Universidad ginebrina, aprendí a investigar el desarrollo del niño, percibiendo enseguida que este trabajo me producía una satisfacción y un placer especial al descubrir la peculiaridad del comportamiento infantil, con sus aciertos, sus errores y sus estrategias a lo largo de los años. Era un acierto de la Universidad ginebrina iniciar las prácticas de los estudiantes en los colegios desde el primer año de la carrera de Psicología. Este beneplácito ante la investigación infantil me llevaría, nada más llegar a Madrid en 1980, a estimular a mis alumnos de Psicología Evolutiva de la Facultad de Psicología de la Universidad Complutense a llevar a cabo investigaciones empíricas, formando, ya entonces, cuatro grupos que analizarían diferentes aspectos del desarrollo de la lógica infantil.

Y el paso de la lógica a las matemáticas es más bien corto (véase Bagassi et al., 2020), de modo que esta circunstancia y los resultados más bien preocupantes obtenidos por los alumnos españoles en evaluaciones tanto nacionales como internacionales en matemáticas,

me llevaría a iniciar un recorrido de casi cuarenta años investigando “cómo y cuándo el niño aprende las matemáticas”, que es el título de mi último libro (Bermejo, 2018).

2.- EVALUACIONES NACIONALES E INTERNACIONALES

Los resultados obtenidos en matemáticas por los alumnos españoles, tanto en las evaluaciones nacionales como internacionales, son por lo menos preocupantes (ver Bermejo, ABC, 06/01/2020). Veamos algunos datos recientes. En las evaluaciones realizadas por el INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) en 1995 en todo el territorio nacional, en centros públicos y privados en 2º de Educación Primaria y en 6º de la antigua EGB, las puntuaciones obtenidas en matemáticas son las más bajas con respecto a las demás materias: el 29’9 % de alumnos de 2º de Educación Primaria no alcanzan la puntuación de suficiente en matemáticas (véase INCE, 1995), y el 52’2 % de los escolares de 6º curso de EGB tampoco consiguen la nota de suficiente (p.75). Y en esta misma línea, la evaluación realizada por el INCE en el año 2000 a alumnos de final de la ESO (16 años), los resultados muestran que solo alcanzan un 40% de aciertos en matemáticas, y este porcentaje baja incluso hasta un 34 % si evaluamos solamente la resolución de problemas (ver INCE, 2001).

En cuanto a las evaluaciones internacionales, el último informe para alumnos de 4º de Primaria (9-10 años) en matemáticas, en TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) realizado en 2019, España obtiene 502 puntos, mientras que Singapur consigue el primer puesto con 625 puntos. Ello significa que España se sitúa en el puesto 37 de los 58 países participantes.

En las evaluaciones de la OCDE (PISA actualizados 9 de diciembre de 2021 (*Programme for International Student Assessment*)) España obtiene 481 puntos y la media de la OCDE es 489, siendo Japón el número uno con 527 puntos. España ocupa el décimo lugar con respecto al último país, y el 28 con respecto al primero. España situándose por debajo de la media de la OCDE.

En cuanto a las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas (IMO: *International Mathematical Olympiad*), que se celebran todos los años para estudiantes preuniversitarios, en el año 2021, China, Rusia y Corea obtienen los tres primeros puestos en este orden, mientras que España se situó en el puesto 63, de un total de 93 países participantes. Una vez más, España sigue situándose en posiciones mediocres con respecto al total de países participantes.

Ante estos resultados mediocres y preocupantes me pregunto si en la España del siglo XXI se están respetando y cumpliendo los principios de la *Declaración de los Derechos del Niño*

(20/11/1959), principios que son igualmente obligatorios e imperativos para todos los ciudadanos y en todos los tiempos. En concreto, el principio 5º de la Declaración de los Derechos del Niño reza así: “El derecho a una educación y a un tratamiento especial para aquellos niños que sufren alguna discapacidad mental o física”. Ello significa que los niños españoles tienen derecho a una educación digna y adecuada al nivel socioeconómico del país en que viven. En consecuencia, en el siglo XXI ¿no sería incumplimiento de este principio obtener en las evaluaciones internacionales puntuaciones en matemáticas más que mediocres? O ¿acaso los escolares españoles no tienen derecho a una formación matemática digna y adecuada?

Desde esta perspectiva, llevo trabajando durante más de cuarenta años para dar respuesta a estos interrogantes, intentando mejorar el desarrollo matemático de nuestros escolares. En esta línea se enmarcan algunos de mis libros, como *“El niño y la aritmética”*, o *“Como enseñar matemáticas para aprender mejor”*, o *“Cómo y cuándo el niño aprende las matemáticas”*, etc., y decenas de publicaciones en revistas nacionales e internacionales.

Y para concluir este apartado me gustaría añadir la imperiosa conveniencia de construir puentes entre la escuela y la universidad, entre la práctica educativa y la investigación universitaria para mejorar la formación matemática de nuestros escolares. En el ámbito de la medicina, por ejemplo, se aplican frecuentemente los avances de la investigación en la práctica médica cotidiana. ¿Por qué no acontece algo parecido en el ámbito de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? En Singapur, uno de los países más avanzados en la formación matemáticas de sus alumnos según aparece en las evaluaciones internacionales, como PISA por ejemplo, sí lo están haciendo desde hace ya algunas décadas de años.

3.- PROGRAMAS DE INTERVENCIÓN PARA MEJORAR LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL NIÑO

Aunque son numerosos los trabajos que se publican anualmente sobre matemáticas, los programas de intervención en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el niño son menos frecuentes. Dada la limitación espacio-temporal de esta conferencia-discurso, veamos con brevedad algunos de ellos más significativos y más conocidos en este campo.

3.1. Instrucción anclada (“Cognition and technology group at Vanderbilt”).

Un grupo de investigadores de la Universidad de Vanderbilt (Nashville, Tennessee) desarrollaron en los años noventa principalmente un programa de intervención para la enseñanza de las matemáticas denominado “Instrucción anclada” (Ver Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1990, 1992). Partiendo de las ideas de “conocimiento inerte” de Whitehead (1929) y de “conocimiento funcional” de Dewey (1933), que pone de relieve la

importancia no solo de conocer un objeto, sino también de saber cómo y cuándo utilizarlo, proponen este programa para ayudar a los alumnos a adquirir conocimiento útil. Efectivamente, en mis investigaciones (ver, por ejemplo, Bermejo y Lago, 1994) he encontrado ejemplos de este fenómeno, tal como ocurre en niños de unos cuatro años, que aprenden pronto a contar, pero no saben para qué sirve el conteo y cuándo aplicarlo. Partiendo de un marco constructivista, crean entornos de aprendizajes significativos, reales e interesantes, que denominan “macrocontextos”, y que facilitan el debate y discusión entre alumnos y profesor. El rol de este último no se limita a ofrecer información, sino más bien es guía durante el proceso de resolución de los problemas. Por tanto, se trata de plantear problemas complejos, pero realistas, que faciliten el aprendizaje cooperativo y el autoaprendizaje.

Se han llevado a cabo varios experimentos con alumnos de quinto y sexto curso, encontrando que la eficacia de la Instrucción Anclada se manifiesta de modo significativo sobre todo en la resolución de problemas. Además, los alumnos que siguen el programa cambian positivamente de actitud con respecto a cuatro variables: autoconfianza, utilidad de las matemáticas, interés por las matemáticas y el desafío de los problemas complejos matemáticos.

3.2. La instrucción guiada cognitivamente.

El programa “Instrucción Guiada Cognitivamente” (CGI) aparece en los años ochenta, adquiriendo mayor desarrollo y popularidad en los años noventa y principios del siglo XXI (ver Carpenter, T. y Fennema, E., 1992; Carpenter, T., Fennema, E. y Franke, M., 1996; Carpenter, T, Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B., 1999). El marco teórico de este programa es manifiestamente constructivista y consta de tres partes:

- 1ª) Estudio correlacional.
- 2ª) Estudio experimental.
- 3ª) Estudio de casos.

1ª Parte: Estudio correlacional.

Aquí se estudia la relación entre el conocimiento pedagógico y creencias de los profesores sobre el pensamiento matemático infantil, así como la relación de estas creencias con el rendimiento matemático de sus alumnos. Los resultados obtenidos muestran que existen relaciones significativas en estas correlaciones (ver Peterson, Fennema, Carpenter y Loef, 1989).

2ª Parte: Estudio experimental.

En esta parte se analizó si la formación de los profesores sobre el pensamiento matemático infantil afectaría a la instrucción impartida por estos profesores y al rendimiento matemático de los alumnos. Los resultados muestran que los profesores del grupo

experimental o mejor informados sobre el pensamiento matemático infantil, insistían más en los procesos de solución de los problemas que en las respuestas, y además dedicaban más tiempo preguntando y escuchando a sus alumnos. Con respecto al rendimiento matemático de los alumnos, obtenían resultados significativamente mejores tanto con respecto a los hechos numéricos, como a la solución de problemas verbales.

3ª Parte: Estudio de casos.

En este apartado se analiza más profundamente el uso que hace el profesor de sus conocimientos sobre el razonamiento matemático de los niños y los cambios que se producen tanto en la instrucción como en las creencias. Igualmente, el rendimiento de los alumnos está relacionado directamente con los cambios que se producen en la instrucción del profesor, de modo que los alumnos resolvían más problemas verbales y les gustaban más las matemáticas.

3.3. Programa “realistic mathematics education”.

Este programa apareció en la década de los setenta en Holanda como contrapartida a los enfoques mecanicistas dominantes en la enseñanza de las matemáticas en este país. Basado en la fenomenología didáctica de Freudenthal (ver 1983), las matemáticas se entienden, no como un sistema formal universal de conceptos y reglas, sino como una actividad humana centrada en la solución de problemas. En otras palabras, el conocimiento matemático se desarrolla a partir de fenómenos del mundo real, de modo que las matemáticas son como una actividad que conduce a los alumnos a reinventar las matemáticas. Pero como precisaba Freudenthal (1973), los alumnos no inventan nada ellos solos, sino que se trata más bien de una reinención guiada. Además, los problemas contextuales juegan un papel significativo en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ya que no solo son un medio en donde se aplican los conocimientos, sino sobre todo es la fuente para construir objetos mentales o conceptos matemáticos. Los problemas contextuales son situaciones de la vida real, familiares y motivantes para los niños, que se presentan en contextos más amplios, como, por ejemplo, un juego, que da lugar a un aprendizaje significativo de los nuevos conceptos matemáticos (ver Gravemeijer y Doorman, 1999).

Para este programa el aprendizaje de las matemáticas es una actividad constructiva que se inicia a niveles concretos e intuitivos (modelos manipulativos, visuales, diagramas, esquemas, etc.) para alcanzar niveles abstractos y formales. Aunque la confirmación experimental de este programa es más bien escasa (ver De Corte, 1995), sin embargo, su incidencia en la formación del currículo nacional en Holanda, así como su influencia en los textos matemáticos holandeses de educación primaria, son notorias (ver De Corte, Greer y Werschaffel, 1996).

3.4. El proyecto de intervención de Cobb y colaboradores.

Cobb y col. (Cobb, 1996; Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti y Perlwitz, 1991; Yackel y Coob, 1996) entienden que el aprendizaje de las matemáticas consiste en un proceso de construcción individual y de enculturación social, resaltando la presencia de dos procesos esenciales en el aula: la negociación y la interacción. Ambos procesos enfatizan el rol activo del alumno en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, el debate y discusión del comportamiento de los niños resolviendo problemas matemáticos lleva a los profesores a cuestionarse determinados aspectos que antes eran incuestionables, como, por ejemplo, a diferenciar entre ejecución correcta y comprensión conceptual; o simplemente llegan a cuestionar actividades de instrucción que se proponen en los libros de texto. El proyecto se desarrolló en tres fases con alumnos de 7/8 años durante un año cada fase. En la primera fase se recogió información sobre el conocimiento matemático de los niños, que serviría como guía durante las dos fases siguientes de intervención. La segunda fase se realizó en un aula de segundo curso a lo largo de todo el año, teniendo en cuenta las tres características siguientes:

- (a) Autonomía intelectual para que las actividades tuvieran sentido para cada niño.
- (b) Se centra en torno a la relación entre conocimiento conceptual y de procedimiento, que, teniendo presente la existencia de una relación dialéctica entre ambos, se sugiere una instrucción simultánea.
- (c) Conviene propiciar la discusión sobre conceptos matemáticos en la que participen los alumnos, especialmente cuando se proponen diferentes métodos para solucionar el mismo problema.

Finalmente, en la tercera fase participaron 10 aulas experimentales y 8 aulas de control. Los resultados muestran que no había diferencias entre los grupos experimentales y de control con respecto a los niveles de ejecución. En cambio, los resultados fueron netamente superiores en los grupos experimentales cuando se trata de la comprensión conceptual.

4.- PROGRAMA EVOLUTIVO INSTRUCCIONAL PARA MATEMÁTICAS (PEIM) DE BERMEJO Y COLABORADORES

4.1. Marco teórico del PEIM

Los fundamentos teóricos de este programa son netamente constructivistas. Los orígenes del constructivismo se remontan a los trabajos de Jean Piaget y Lev S. Vygotsky (los dos nacieron el año 1896, el primero suizo y el segundo bielorruso). Dentro del constructivismo aparecen dos corrientes importantes: el constructivismo cognitivo y el constructivismo

social o dialéctico, según se enfatizan los procesos de construcción individual o los procesos sociales y culturales (Fosnot, 1996). Pero en la realidad el aprendizaje de las matemáticas resulta de procesos de auto-organización y de enculturación, o dicho de otro modo, consiste en una actividad constructiva, interactiva e individual. Desde esta perspectiva conciliadora e inclusiva (Cobb, 2007), comentemos brevemente cuatro principios teóricos sobre los que se fundamenta el PEIM.

a) El alumno construye su propio conocimiento.

El conocimiento matemático no se recibe pasivamente, no es una mera absorción, sino que es creado activamente por el niño mediante acciones físicas y mentales; o dicho de otro modo, para que el aprendizaje sea significativo el niño asimila e integra los nuevos conocimientos matemáticos con sus conocimientos previos. Desde este punto de vista, el profesor se limitará a estimular y facilitar el proceso de aprendizaje de los alumnos.

b) La instrucción guía y apoya la construcción del conocimiento por parte del alumno.

Tradicionalmente la instrucción en matemáticas pretendía sobre todo presentar con claridad los conocimientos matemáticos, usando materiales creativos e ingeniosos. En cambio, desde el enfoque constructivista se busca que los alumnos desarrollen ideas personales utilizando sus propios métodos, favoreciendo el debate, la crítica y la justificación de los métodos de solución utilizados. Igualmente, se debe estructurar el clima social e intelectual del aula, arrojando luz sobre los conflictos y facilitando el diálogo entre los alumnos. También conviene resaltar la importancia del trabajo cooperativo en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, siendo conscientes de que un buen rendimiento personal repercute en el rendimiento de sus compañeros, y que el propio rendimiento depende del buen rendimiento de los demás (Ver Saxe y Guberman, 1998).

c) La instrucción se centra en torno a la comprensión y solución de problemas.

Efectivamente, así lo establece el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) cuando escribe que los alumnos deben “construir los nuevos conocimientos matemáticos a través de la solución de problemas” (p. 52). Así se recomienda igualmente desde el constructivismo al afirmar que la instrucción de las matemáticas debe realizarse a través de problemas para facilitar la comprensión (Fennema y Romberg, 1999). Además, en nuestras investigaciones (Bermejo y Rodríguez, 1988, 1990) hemos constatado que cuando se pide a alumnos de primer ciclo que resuelvan problemas verbales de sumar o restar raramente escriben la expresión numérica antes de proceder a su resolución e incluso a veces son incapaces de hacerlo después de resolverlos correctamente. Finalmente, la resolución de problemas desarrolla la habilidad para utilizar los conceptos matemáticos y establecer conexiones entre ellos (Schoenfeld, 1996).

d) El desarrollo evolutivo específico ofrece los fundamentos para secuenciar los objetivos de instrucción.

Desde la enseñanza tradicional la estructura matemática proporciona las bases para secuenciar los contenidos de instrucción. En cambio, desde el enfoque constructivista la instrucción debe seguir los pasos marcados por el desarrollo matemático específico del niño, es decir, los pasos que sigue el niño en el aprendizaje de contenidos significativos como el conteo, la adición, la sustracción, etc. Por ello, el profesor debería conocer el perfil matemático de cada escolar, de modo que, en cada momento del aprendizaje, conozca el nivel actual de desarrollo matemático de cada niño, y cuál es el paso siguiente que debe dar para avanzar en su aprendizaje. Así, por ejemplo, si se trata del perfil matemático con respecto a la suma, el profesor debería conocer no sólo la dificultad de los distintos problemas verbales aditivos, que hace que algunos problemas verbales sean realmente sencillos (por ejemplo: los problemas de cambio), mientras que otros son más complejos (problemas de comparación) que suelen adquirirse uno o dos años más tarde. Además, para ser eficaces conviene conocer también las estrategias que utilizan habitualmente los alumnos para resolver estos problemas, así como los errores que suelen cometer en cada uno de ellos. Por ello, subrayamos que los errores matemáticos infantiles suelen aportar una información muy valiosa tanto para el profesor como para el investigador.

4.2. Pilares del PEIM.

El PEIM es un modelo integrativo e interdependiente que se basa sobre cuatro pilares fundamentales: la enseñanza (profesor), el aprendizaje (alumno), el currículo (contenidos matemáticos) y el funcionamiento de la clase (dinámica del aula). No se trata de un modelo unidireccional, ni estático, sino que, como el proceso enseñanza-aprendizaje, a medida que avanza uno, influye en el otro y viceversa. El objetivo prioritario del PEIM es la mejora del rendimiento matemático en el aula, interviniendo sobre estos cuatro pilares fundamentales: los alumnos, el profesor, los contenidos curriculares y la dinámica del aula.

a) Los alumnos: **Educación personalizada.**

Como hemos subrayado en varias ocasiones (ver Bermejo, 2014, 2018) el alumno es el protagonista del aula, de modo que el proceso enseñanza-aprendizaje debe centrarse en torno al alumno. El National Council of Teachers of Mathematics propone el siguiente Principio de aprendizaje: “Los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión, construyendo activamente el nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento anterior” (NCTM, 2000, p. 20). Pero no hay que olvidar que, como apunta Carpenter y colaboradores (2014), cada alumno lleva a cabo una construcción idiosincrásica en el proceso de aprendizaje.

El PEIM propone una educación matemática personalizada, en el sentido de que el profesor debe conocer en todo momento el nivel de competencia matemática actual de cada alumno, así como su zona de desarrollo próximo. Para ello, el PEIM aconseja el uso de perfiles matemáticos individuales que pueden iniciarse mediante entrevistas individuales y modificarse después a medida que los alumnos progresan en su aprendizaje (ver Bermejo y otros, 2000).

Por otra parte, conviene tener presente que las creencias y actitudes de los escolares hacia las matemáticas inciden notoriamente en su aprendizaje (Bermejo y otros, 2000; Randel, Stevenson y Witruk, 2000). Por ello, el PEIM sugiere el uso de “Cuestionarios” para modificar creencias y actitudes hacia las matemáticas si fuera necesario (ver Ruffell, Mason y Allen, 1998).

b) El profesor: **Formación psicopedagógica y específica de los contenidos.**

El NCTM (2000, p. 16) propone como Principio de enseñanza: “La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan para aprender, así como retarlos y apoyarlos para que aprendan bien”. La formación del profesorado en nuestro país ha sido frecuentemente **inadecuada e insuficiente**, en el sentido de que las Escuelas o Facultades de Educación han ofertado frecuentemente actividades matemáticas avanzadas, cuando la mayoría de estos profesores van a dedicar su enseñanza a contenidos matemáticos elementales como la adición, sustracción, etc. (ver Bermejo, 2014). Y además, la formación era insuficiente porque el temario universitario carecía frecuentemente de contenidos relevantes, como por ejemplo, el desarrollo infantil de cada uno de los contenidos matemáticos más significativos (ver Bermejo, 1990).

Por otra parte, las actitudes y creencias del profesor hacia las matemáticas constituyen también un factor importante en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (ver Bermejo, Lago y Rodríguez, 2000; Jacobson, 2017; Philipp, 2007; Ruffell, Mason y Allen, 1998). Es obvio que, si un profesor de matemáticas confiesa que no le gustan las matemáticas, debería cambiar su docencia hacia otros contenidos del currículo escolar.

El PEIM postula que el profesorado posea una formación psicopedagógica actualizada y unos conocimientos exhaustivos sobre el desarrollo-aprendizaje de los contenidos matemáticos más significativos. Cuando hablamos de formación psicopedagógica actualizada, no debe entenderse la enseñanza como la simple transmisión de conocimientos, sino más bien supone la aceptación de, al menos, dos componentes nucleares del constructivismo: (a) los niños construyen sus propios conocimientos, y (b) la instrucción garantiza y facilita la construcción del conocimiento por parte del alumno. Más en concreto, el profesor no solo debe conocer profundamente los contenidos matemáticos escolares, sino también debe conocer al alumno aprendiendo matemáticas, de modo que

pueda anticipar el comportamiento del niño, sus posibles estrategias y errores que puede cometer para adquirir cada contenido matemático. Como escribe Rivera-Rivera (2019): “**Para saber cómo se enseña hay que saber cómo se aprende**” (p. 165). Para otras perspectivas en la educación de los profesores de matemáticas ver Thompson, Suurtamm y Huntley (2021).

c) Los contenidos: **Selección y secuenciación.**

El PEIM propone **seleccionar** los contenidos que se enseñan cotidianamente en el aula, buscando siempre la comprensión, el razonamiento, la solución de problemas, representaciones mentales, toma de decisiones, que son fundamentales en el desarrollo matemático del niño (ver Bermejo y otros, 1999). En cambio, las actividades mecánicas y memorísticas pasarían a un segundo lugar.

Además de seleccionar convenientemente los contenidos matemáticos, el PEIM propone **secuenciarlos** adecuadamente en función de la dificultad que presenten para los escolares. Por tanto, la enseñanza debe ajustarse al desarrollo concreto de cada escolar (ver Bermejo y otros, 2000). Para conocer el nivel evolutivo de cada alumno hemos realizado estudios microgenéticos que nos indican detalladamente los pasos evolutivos que suele seguir el niño en el aprendizaje de los contenidos matemáticos fundamentales del currículo escolar (ver Bermejo, 2004). De este modo el profesor podrá diagnosticar e intervenir después eficazmente para mejorar el aprendizaje de los alumnos (ver Bermejo, Morales y García de Osuna, 2004).

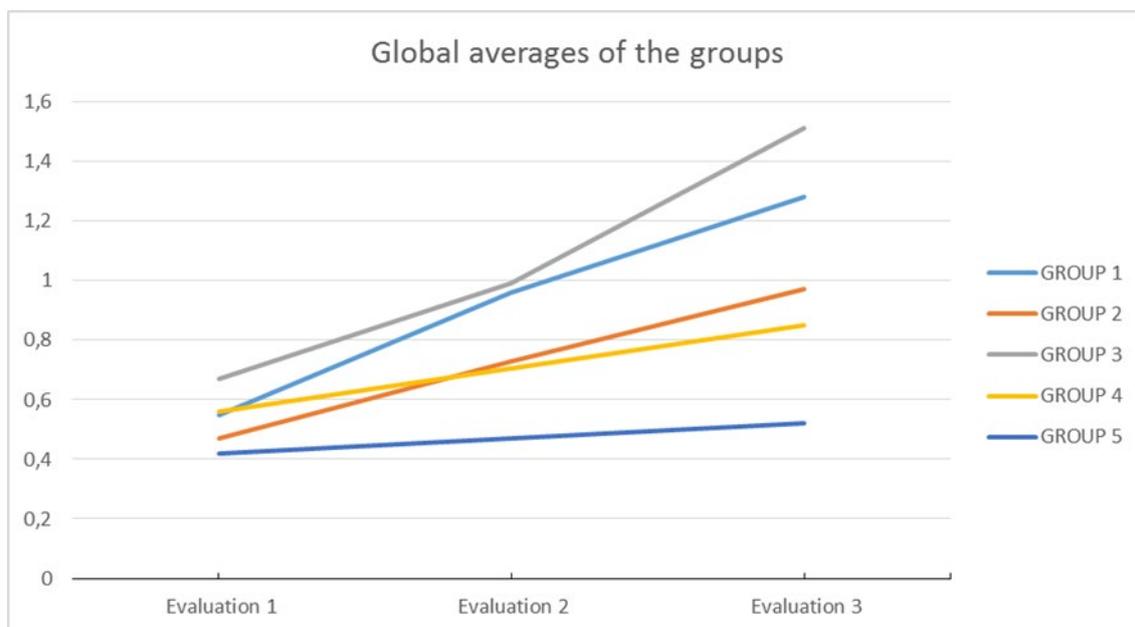
d) El contexto del aula: **dinámica constructivista.**

Abreu (1998) entiende por contexto la dinámica de la clase y la multiplicidad de factores que inciden en el proceso de aprendizaje. Saxe y Guberman (1998), por su parte, consideran el aprendizaje de las matemáticas como la formación y consecución de objetivos individuales en la realización de actividades colectivas. Finalmente, otros proponen la participación activa verbal o no en el aula (ver Inagaki, Hatano y Morita, 1998), o resaltan los efectos positivos del aprendizaje cooperativo (ver Cowie y Berdondini, 2001).

El PEIM evalúa la dinámica del aula cumplimentando una “**Guía de Observación**” por parte de observadores adiestrados durante la clase a lo largo del curso escolar, prestando especial atención a las intervenciones del profesor y de los alumnos, y a los recursos didácticos utilizados.

4.3. Implementación del PEIM

El PEIM se ha aplicado a alumnos de primero y segundo de primaria de colegios de las Comunidades de Madrid y Aragón.



Abreviando al máximo, los resultados muestran que hay una clara relación entre el nivel de aplicación del constructivismo en el aula y el desarrollo matemático de los escolares, de tal modo que los profesores que conocían y aplicaron mejor los principios constructivista en el aula sus alumnos obtenían mejores resultados en matemáticas. Igualmente, los grupos experimentales obtienen rendimientos significativamente más altos que los escolares pertenecientes a los grupos de control, a pesar de que al inicio del año escolar las competencias de los dos grupos eran similares. Lo mismo acontece con respecto a las estrategias utilizadas y los errores cometidos, apareciendo diferencias significativas entre los dos grupos. Finalmente, resaltamos la importancia del uso de materiales en el aula sobre todo al principio del aprendizaje de los contenidos matemáticos, tal como hemos mostrado empíricamente (ver Bermejo y Lago, 1988), y confirmado desde la neurociencia (Dehaene, 1997; Rivera-Rivera, 2019).

Antes de terminar quisiera resumir brevemente los perfiles constructivistas del alumno y del profesor. En cuanto al

PERFIL DEL ALUMNO:

- (a) El alumno construye su propio conocimiento.
- (b) Es activo manual y mentalmente.
- (c) Adquiere conocimientos significativos, y
- (d) Es autónomo e independiente en la construcción de su conocimiento. En cuanto al

PERFIL DEL PROFESOR:

- (a) El alumno es el protagonista del aula.
- (b) Los niños poseen conocimientos previos antes de iniciar la instrucción.
- (c) El aprendizaje de las matemáticas supone comprensión, y
- (d) La actitud del profesor es activa: escuchando, preguntando y evaluando constantemente el proceso de aprendizaje.

Si para concluir nos preguntamos sobre la incidencia del PEIM en la práctica educativa nacional, solo referir una anécdota y citar un trabajo científico. En cuanto a la anécdota, aconteció hace unos años, cuando la conocida periodista Mercedes Milá me preguntaba al final de una entrevista realizada en Radio Nacional de España: “¿Le han llamado a usted desde el Ministerio de Educación?” Y desde un punto de vista científico, la respuesta, nada sencilla, a este interrogante la encontramos en un artículo de H. Perines (2018) que se titula: “¿Por qué la investigación educativa no impacta en la práctica educativa?”.

5.- BIBLIOGRAFÍA

ABREU, G. DE (1998). The mathematics learning in sociocultural contexts: The mediating role of social valorisation. *Learning and Instruction*, 8, 567-572.

APA, (1993).

BAGASSI, M., SALERNI, N., CASTOLDI, V., SALA, V., CARAVONA, L., POLI, F., ET AL. (2020). Improving Children’s Logical and Mathematical Performance via a Pragmatic Approach. *Front. Psychol.* 5:54. doi: 10.3389/feduc.2020.00054

BERMEJO, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Ed. Paidós.

BERMEJO, V. (2004, 2014). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: Editorial CCS.

BERMEJO, V. (2015). *Escritos de juventud I: Documentos filosófico-literarios*. Madrid: Letras de Autor.

BERMEJO, V. (2016). *Escritos de juventud II: Documentos teológico-literarios*. Madrid: Letras de Autor.

BERMEJO, V. (2018). *Cómo y cuándo el niño aprende las matemáticas*. Editorial Académica Española.

BERMEJO, V. Y LAGO, M.O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje*, 44, 109-121.

BERMEJO, V. Y LAGO, M.O. (1994). The use of counting in numerical reasoning. En J. E. Van Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school* (202-219). Doetinchen, The Netherlands: Graviant Publishing Company.

BERMEJO, V. Y RODRÍGUEZ, P. (1988). La genèse de l'opération d'addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmes additifs. *European Journal of Psychology of Education, Número Special*, 75-76.

BERMEJO, V. Y RODRÍGUEZ, P. (1990). Relevancia de algunos factores en la resolución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas*, 8, 23-41.

BERMEJO, V., LAGO, M. O., AND RODRÍGUEZ, P. (1998). Aprendizaje de la adición y substracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada* 51, 533–552.

BERMEJO, V., LAGO, M.O., RODRÍGUEZ, P., PÉREZ, M., BEGERANO, F., MORICHE E., DOPICO, C., LOZANO, M.J. Y PINTOS M.T. (1999). Intervención psicopedagógica en el aula de matemáticas: Un programa psicoinstruccional para primer ciclo de Educación Primaria. En *Premios Nacionales de Investigación Educativa 1998* (pp. 189-210). Ministerio de Educación y Ciencia: CIDE.

BERMEJO, V., LAGO, M.O., RODRÍGUEZ, P. Y PÉREZ, M. (2000). Fracaso escolar en matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 53, 43-62.

BERMEJO, V., LAGO, M. O., RODRÍGUEZ, P., DOPICO, C., AND LOZANO, J. M. (2002). *PEI Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Editorial Complutense.

BERMEJO, V. (2004). Microgénesis y aprendizaje de las matemáticas. En “*Learning Sciences and Brain Research: 2nd. Literacy & Numeracy Networks Meeting*”. El Escorial, Madrid: OECD (Abstract).

BERMEJO, V., MORALES, S. Y GARCÍA DE OSUNA, J. (2004). Supporting children's developing understanding of cardinality. *Learning and Instruction*, 14, 381-398.

BERMEJO, V. (2014). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: Editorial CCS.

BERMEJO, V. (2018). *Cómo y cuándo el niño aprende las matemáticas*. San José: Construyendo puentes entre Universidad-Escuela.

BERMEJO, V. (2020). Por qué los alumnos españoles fracasan en matemáticas. *ABC*, 06/01/.

BERMEJO, V., ESTER, P. AND MORALES, I. (2021). A Constructivist Intervention Program for the Improvement of Mathematical Performance Based on Empiric Developmental Results (PEIM). *Frontiers in Psychology*, 13 January 2021/ <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.582805>.

CARPENTER, T. Y FENEMA, E. (1988). Research and cognitively guided instruction. En E. Fenema, T. Carpenter y J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 2-19). Madison: National Center for Research in mathematical Sciences Education, University of Wisconsin.

CARPENTER, T. Y FENNEMA, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education*, 17, 457-470.

CARPENTER, T. Y LEHRER, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, N.J.: LEA.

CARPENTER, T., FENNEMA, E. Y FRANKE, M. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *Elementary School Journal*, 97 (1), 3-20.

CARPENTER, T., FENNEMA, E., FRANKE, M.L., LEVI, L. Y EMPSON, S.B. (1999, 2014). *Children's mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth: Heinemann.

COOB, P. (2007). Putting philosophy to work. Coping with multiple theoretical perspectives. En F. K. Lester, Jr. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning* (pp. 3-38). National Council of Teachers of Mathematics. Information Age Publishing.

COBB, P. (1996). Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. En C. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 33-52). NY: Teachers College Press.

COBB, P., WOOD, T., YACKEL, E., NICHOLLS, J., WHEATLEY, G., TRIGATTI, B. Y PERLWITZ, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (1), 3-29.

COGNITION AND TECHNOLOGY GROUP AT VANDERBILT (1990). Anchored instruction and its relationship to situated cognition. *Educational Researcher*, 19 (6), 2-10.

COGNITION AND TECHNOLOGY GROUP AT VANDERBILT (1992). The Jasper series as an example of anchored instruction: Theory, program description, and assessment data. *Educational Psychologist*, 27, 291-315.

COWIE, H. Y BERDONINI, L. (2001). Children's reactions to cooperative group work: a strategy for enhancing peer relationships among bullies, victims and bystanders. *Learning and Instruction*, 11, 517-530.

DE CORTE, E. (1995). Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Psychologist*, 30, 3746.

DE CORTE, E., GREER, B. Y VERSCHAFFEL, L. (1996). Mathematics teaching and learning. En D.C. Berliner y R.C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.

Declaración de los Derechos del Niño (20/11/1959).

DEHAENE, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

FENNEMA, E. Y ROMBERG, TH. (1999) (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, N.J.: LEA.

FOSNOT, C. (1996). *Constructivism: Theory, perspectives, and practice*. NY: Teachers College Press.

FRANKE, M., FENEMA, E. Y CARPENTER, T. (1997). Changing teachers: Interaction between beliefs and classroom practices. En E. Fenema y B.S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 255-282). Mahwah, N.J.: LEA.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structure*. Dordrecht: Kluwer.

GINSBURG, H., KLEIN, A. Y STARKEY, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En Siegel, I. y Renninger, A. (Eds.), *Handbook of child psychology, Vol. 4* (pp. 401-476). NY: John Wiley & Sons.

GRAVEMEIJER, K. G. Y DOORMAN, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

HIEBERT, J. Y CARPENTER, TH. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 65-100). New York: Macmillan Publishing Company.

INAGAKI, K., HATANO, G. Y MORITA, E. (1998). Construction of mathematical knowledge through whole-class discussion. *Learning and Instruction*, 8, 503-526.

IMO (International Mathematical Olympiad), nº 49, 2008; y nº 62, 2021.

INCE (1995). Evaluación de la Educación Primaria. Informe Preliminar.

INCE (2001). Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000. Datos básicos.

JACOBSON, E. (2017). Field Experience and Prospective Teachers' Mathematical Knowledge and Beliefs. *J. Res. Math. Educ.*, 48, 148-190.

MOLINER, L. AND ALEGRE, F. (2020). Peer tutoring effects on students' mathematics anxiety: Middle school experience. *Front. Psychol.*, 11:1610. Doi: 10.3389/fpsyg.2020.01610.

MONTAGUE, M. (1997). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 164-177.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

PERINES, H. (2018). “¿Por qué la investigación educativa no impacta en la práctica educativa?”. *Estudios sobre Educación*, vol. 14, pp. 9-27.

PETERSON, P., FENNEMA, E., CARPENTER, T. Y LOEF, M. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, 6 (1), 1-40.

PHILIPP, R.A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester Jr. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: Information Age, pp. 257-315.

PHILIPPOU, G. Y CHRISTOU, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189-206.

PIAGET, J. (1937/1967). *La construction du réel chez l'enfant*, 5th Ed. France: Delachaux et Niestlé Ed.

PISA (Programme for International Student Assessment)), 2011, 2015, 2021.

RANDEL, B., STEVENSON, H.W., Y WITRUK, E. (2000). Attitudes, beliefs, and mathematics achievement of German and Japanese high school students. *International Journal of Behavioral Development*, 24, pp. 190-198.

RIVERA-RIVERA, E. (2019). El neuroaprendizaje en la enseñanza de las matemáticas: la nueva propuesta educativa. *Entorno*, 67, pp. 157-168.

RUFFELL, M., MASON, J. Y ALLEN, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 1-18.

SANTIUSTE, V. (2017). Biología, lenguaje y educación. Reflexiones críticas sobre una nueva Pedagogía científica. *An. Real Acad. Doct.*, Vol. 2, Nº 3, pp. 398-411.

SARID, M., MELTZER, Y., AND RAVEH, M. (2020). Academic achievements of college graduates with learning disabilities vis-a-vis admission criteria and academic support. *J. Learn. Disabil.* 53, 60–74. doi: 10.1177/0022219419884064

SAXE, G. Y GUBERMAN, S.R. (1998). Studying mathematics learning in collective activity. *Learning and Instruction*, 8, 489-501.

SCHIFTER, D. (1996). A constructivist perspective on teaching and learning mathematics. En C.T. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 73-91). NY: Teachers College Press.

SCHOENFELD, A. (1996). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. Resnick y L. Klopfer (Comps.), *Currículum y cognición* (pp. 107-170). Buenos Aires: AIQUE.

THOMPSON, D.R., SUURTAMM, CH. Y HUNTLEY, M.A. (2021). *International Perspectives on Mathematics Teacher Education*. Edit: Information Age Publishing.

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), 2011, 2015, 2019.

VALENTINE, K. D., AND BOLYARD, J. (2019). Lived Moments of Shift in Prospective Elementary Teachers' Mathematical Learning. *J. Res. Math. Educ.* 4, 436-463. doi: 10.5951/jresmetheduc.50.4.0436

WONG, B.Y.L. (1993). Pursuing an elusive goal: Molding strategic teachers and learners. *Journal of Learning Disabilities*, 26, 354-357.

WUBBELS, T., KORTHAGEN, F. Y BROEKMAN, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 1-28.

[PubMed Abstract](#) | [CrossRef Full Text](#) | [Google Scholar](#)

YACKEL, E. Y COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.